

# Un experimento de enseñanza basado en la actualización del texto guía de Cálculo Diferencial para estudiantes de Ingeniería en Chile, su estado del arte

Elisabeth Ramos-Rodríguez, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile  
Jonathan Rojas-Valero, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile  
Betsabé González-Yáñez, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile  
Patricia Vásquez Saldías, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

**Resumen:** Este trabajo tiene por objetivo mostrar el estado del arte correspondiente a un estudio que considera el desarrollo de un experimento de enseñanza (Plomp, 2010) (diseño, planificación y análisis de una unidad didáctica) que favorezca el proceso de enseñanza y aprendizaje de futuros ingenieros, recién ingresados a la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Este experimento se basa en el rediseño del texto guía bajo el alero de la didáctica de la matemática. Bajo el paradigma cualitativo, abordamos el estado del arte a partir de dos aristas: la experiencia docente y los textos actualmente utilizados. Sobre la experiencia docente, analizamos, a partir de una encuesta, la forma en que este texto guía se ha empleado y su implicancia en docentes de la Universidad. Para la segunda arista, hemos considerado el estudio de los textos mayormente empleados en tres universidades prestigiosas de nuestro país, observando sus componentes matemáticos y/o de la didáctica de la matemática. Los resultados muestran una diversidad de formas en que se usa el texto, desde una simple sugerencia para el estudiante universitario, hasta un apoyo explícito, clase a clase. Por otro lado, se evidencia un empleo de textos que poseen un fuerte componente disciplinario (de la matemática), en desmedro de lo didáctico. Esto nos deja en un escenario complejo y desafiante para el experimento de enseñanza: el diseño de un texto que impulse la conexión entre la matemática y su didáctica como un medio que fortalezca el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática a nivel superior.

**Palabras clave:** experimento de enseñanza, texto guía, cálculo diferencial

**Abstract:** His paper aims to show the state of the art relevant to a study that considers the development of a teaching experiment (Plomp, 2010) (design, planning and analysis of a teaching unit) to promote the teaching and learning of future engineers newly admitted to the Catholic University of Valparaiso, Chile. This experiment is based on the redesign of the textbook under the eaves of the teaching of mathematics

. Under the qualitative paradigm, we addressed the state of the art from two angles: the teaching experience and the texts used today. On teaching experience, we analyze, from a survey, the way this textbook has been used and its implication in teaching at the University. For second edge, we considered the study of texts mostly employees in three prestigious universities in our country, observing their mathematical components and / or the teaching of mathematics. The results show a variety of ways in which the text is used, from a simple suggestion for the college student, until explicit support, class to class. On the other hand, use of texts that have a strong disciplinary component (mathematics), to the detriment of the teaching is evident. This leaves us in a complex and challenging scenario for teaching experiment: the design of a text that promotes the connection between mathematics and its teaching as a means to strengthen the teaching and learning of mathematics at higher level.

**Keywords:** Experiment Teaching, Textbook, Differential Calculus

## Introducción

Históricamente, una herramienta impulsada para favorecer el aprendizaje de los alumnos de primer año de Universidad en la asignatura de Cálculo I (cálculo diferencial para ingeniería) es el diseño y empleo de un texto de apoyo (Arancibia y Mena, 1996). Este texto se diseñó sin contar con una mirada explícita desde la didáctica de la matemática, pero el grado de profun-



didad con el que la matemática se trata y la gama de aplicaciones que contiene para la Ingeniería le ha otorgado a lo largo de los años, un reconocimiento tanto a nivel local (ya lleva 2 décadas siendo el texto guía en todas las Carreras de Ingeniería de nuestra Universidad) como a nivel nacional (por ejemplo, la Universidad Diego Portales lo tiene en varios de sus programas de estudios como texto de referencia) e internacional (en Universidades extranjeras, como la Universidad Nacional de Córdoba, Argentina). En la actualidad este texto es utilizado en diversos grados, según el énfasis que cada académico quiera otorgarle.

Por otro lado, el docente de nuestra Institución tiende a una enseñanza tradicional y conductista. Así, por ejemplo, estudios que hemos realizado (Guzmán, Ramos y Mena, 2009) en nuestra Universidad, nos evidencia que, en el caso de la axiomática de los números reales (tema que pretendemos tratar en este estudio), los profesores la presentan con una metodología expositiva, para que, finalmente no sea materia que consideren en las pruebas. Nos planteamos, pues, el fortalecimiento de la enseñanza impartida a partir de las sugerencias que se proponen en el texto guía. Este trabajo presenta elementos del estado del arte para desarrollar un Experimento de Enseñanza (Plomp, 2010) (es decir, el diseño, planificación y análisis de una unidad didáctica) que favorezca el proceso de enseñanza y aprendizaje de los futuros Ingenieros, recién ingresados a nuestra casa de estudios, a partir del rediseño del texto guía. La nueva versión contemplará sistemas de reforzamiento, seguimiento y evaluación, así como aspectos relativos a estrategias de aprendizaje.

Los resultados de esta experiencia nos permitirá visualizar en qué grado la reformulación del texto guía apoya la propuesta de enseñanza basada en él y por consecuencia, aportan al proceso de inserción a la universidad de las nuevas generaciones de estudiantes. De esta forma, aprovecharemos los beneficios que la didáctica de la matemática nos entrega para el rediseño de un texto que se utiliza desde ya dos décadas en una gran cantidad de estudiantes novatos, en específico de las Carreras de Ingeniería de la universidad.

## Metodología

Como una metodología mixta, que considera aspectos cualitativos y cuantitativos se enmarca este trabajo descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). Los instrumentos de recogida de datos son dos: un cuestionario y libros de apoyo a la asignatura de cálculo, de diferentes universidades chilenas.

El cuestionario contenía preguntas abiertas y preguntas cerradas que permitieron tener una visión sobre el tratamiento que tiene el libro estudiado. Las preguntas cerradas se detallan en la tabla 1.

Tabla 1: Preguntas cerradas del cuestionario

N°	PREGUNTA
1	Incluyo el libro en la bibliografía de los cursos que dicto.
2	Utilizo el libro como texto oficial del curso.
3	Utilizo el libro como texto complementario al curso.
4	Las guías de ejercicios que propongo a mis estudiantes se extraen exclusivamente del libro.
5	Utilizo exclusivamente el libro para preparar mis clases.
6	Utilizo el texto para obtener ejemplos de ejercicios o problemas para diseñar las evaluaciones (Quiz o Certamen).

Las preguntas abiertas tenían por intención recabar mayor información sobre el tratamiento del libro desde el punto de vista matemático y didáctico (tabla 2).

Tabla 2: Preguntas abiertas del cuestionario

N°	PREGUNTA
7	El tratamiento (definiciones, ejemplos, ejercicios) de los temas del libro, desde el punto de vista matemático, es adecuado para las Carreras en donde lo utilizo
8	El libro no requiere cambios desde el punto de vista matemático.
9	El tratamiento (definiciones, ejemplos, ejercicios) de los temas del libro, desde el punto de vista didáctico, es el adecuado para las Carreras en la que lo utiliza.
10	Realizo en clases, algunas demostraciones como las que aparecen en el libro.
11	Realizo en clases algunos de los problemas de planteo presentados en el libro.

Los sujetos informantes son profesores que imparten o han impartido el curso Cálculo Diferencial, en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Se seleccionan a partir del criterio de disponibilidad y accesibilidad a la encuesta.

El análisis de los datos se lleva a cabo a partir del método de análisis de contenido (Krippendorff, 1990), ocupando como unidades de análisis las respuestas dadas por los docentes en cada una de las preguntas del cuestionario.

### Resultados

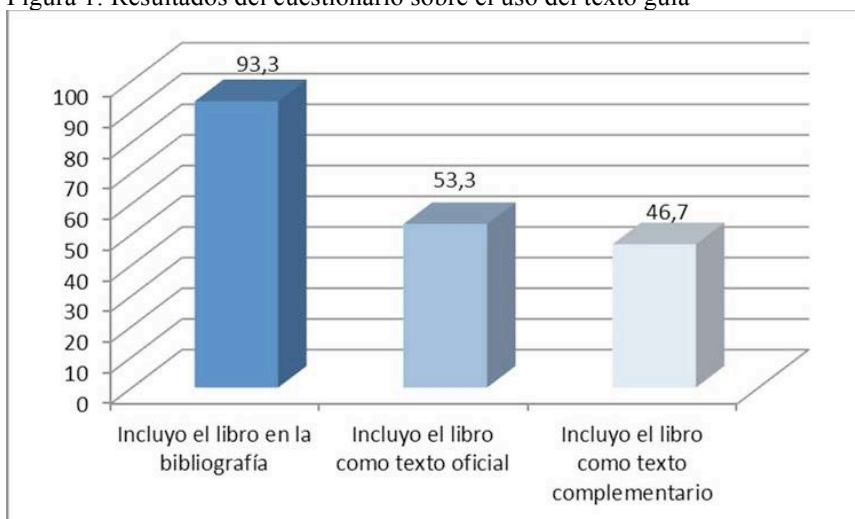
El análisis se lleva a cabo tanto para el cuestionario como para los textos estudiados.

En el caso del cuestionario, analizamos la forma en que el texto guía se ha empleado y su importancia en docentes de la Universidad.

#### *Sobre el uso del libro en sus cursos*

Respecto al uso del libro, que hacen los profesores, como texto en sus cursos, se observa una preocupación por continuar con su uso desde distintas perspectivas. Se observa que un alto número de docente (93.3%) lo sugiere en sus bibliografía, un poco más de la mitad de docentes encuestados lo considera como texto oficial, y el 46.7% de los docentes encuestados como texto complementario (ver gráfico de la figura 1).

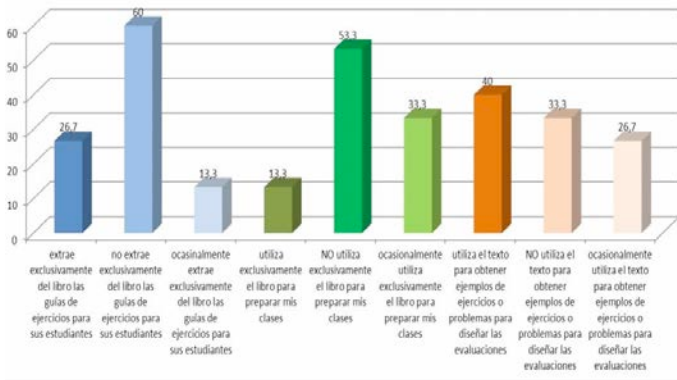
Figura 1: Resultados del cuestionario sobre el uso del texto guía



### Sobre el contenido del libro

Respecto al contenido del libro se observa (ver figura 2) que un 60% de los docentes encuestados manifiesta no extraer exclusivamente del libro los ejercicios para sus estudiantes. Un 53.3% de los docentes encuestados no utiliza exclusivamente el libro para preparar sus clases. Y un 40% de los docentes encuestados utiliza el libro para obtener ejemplos o problemas para diseñar sus evaluaciones. Esto nos sugiere una intención de emplear el libro para seleccionar problemas complejos para las evaluaciones, no así para la realización de sus clases.

Figura 2: Resultados del cuestionario sobre el contenido matemático del libro

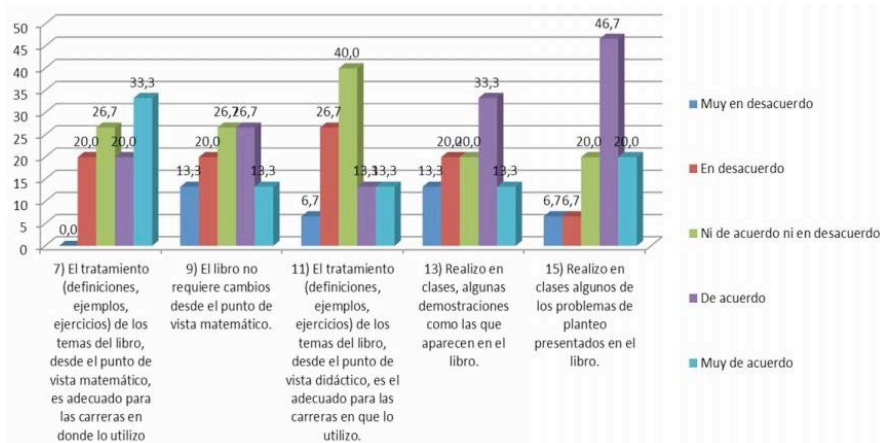


### Del tratamiento del libro

Sobre el tratamiento del libro se obtienen distintas apreciaciones (figura 3).

Un poco más de la mitad de los docentes encuestados (53.3%), tienden a opinar que el tratamiento del libro (definiciones, ejemplos, ejercicios) desde el punto de vista matemático es adecuado para las Carreras de Ingeniería donde las emplea. Mencionan que el énfasis del uso del libro depende de la Carrera a la que se le imparte cálculo, ya que hay aplicaciones que dependen de las especialidades o que en ellas no es relevante el aspecto conceptual de la matemática, ya que tiene una visión que descuida al tipo de alumno que ingresa actualmente a la Universidad y la profundidad con que se tratan los temas. Destacan que el texto posee problemas (problemas de planteo, por ejemplo) y formalismo matemático muy complejos para el actual estudiante.

Figura 3: Resultados del cuestionario sobre el tratamiento del libro



Desde el punto de vista didáctico, un 26.6% de los profesores encuestados opina que es adecuado, pero un 33.4% opina que no es adecuado. Los docentes mencionan que el texto tiene un sobrecargo de escritura y de explicaciones sobre procedimientos, problemas y formalismo matemático muy complejos, que causan frustración en los estudiantes.

Un 40% de los docentes encuestados opina que el libro no requiere cambios desde el punto de vista matemático y un 33.3% opina que sí. Este último grupo de profesores menciona que el texto debería contar con un mayor espectro de aspectos metódicos y didácticos, más que formales (teoremas y definiciones). Junto a lo anterior, se manifiesta que debería haber un texto menos riguroso desde el punto de vista matemático que ayudara al trabajo en algunas carreras que requieren de matemáticas más aplicadas. Algunos mencionan que el capítulo de números reales debe ser más acotado.

Un 46.6% de los docentes menciona que en clases se apoya del libro para realizar algunas demostraciones, sólo en caso que el tiempo lo permita y sólo aquellas que son significativas para el aprendizaje, para afianzar el conocimiento que deben tener los futuros profesionales. Aquellos que no realizan demostraciones (33.3%) mencionan que éstas no son necesarias, y que no se exigen en las evaluaciones.

Un 66.7% de los docentes encuestados menciona que se apoya del libro para realiza algunos ejercicios propuestos por éste en clases. Mencionan que el texto es rico en el planteamiento de problemas, de muy buena calidad matemática y motivador, pero eligen generalmente aquellos de menor complejidad, observan que algunos son inalcanzables por los estudiantes.

## **Análisis de textos de otras universidades**

Para la segunda arista, hemos considerado el estudio de los textos mayormente empleados en tres universidades prestigiosas de nuestro país, observando sus componentes matemáticos y/o de la didáctica de la matemática.

En la bibliografía correspondiente a la de textos complementarios para las asignaturas de Cálculo Diferencial de diversas universidades de la zona, se encuentran “Cálculo” de James Stewart (Stewart, 2007), “Cálculo” de Edwars y Penney (Edwards y Penney, 1996), desarrollan de manera muy somera los contenidos sobre los números reales, cuerpo ordenado y completo. También hemos estudiado el texto “El cálculo” de Leithold (Leithold, 1998) y “Cálculo” de Purcell, Varberg y Rigdon (Cálculo, Purcell, Varberg y Rigdon, 2007).

El primero de ellos comienza con una presentación preliminar del cálculo, cálculo de áreas en el tratamiento de integrales, situaciones que son abordadas a partir de la derivada, de series, para continuar con el capítulo de funciones y modelos.

Al final del texto se encuentran los apéndices, el primero de ellos “Intervalos, desigualdades y valores absolutos”. Hace mención a los números reales, indicando que el cálculo infinitesimal se desarrolla en el sistema de números reales. Comienza haciendo mención a los enteros, continúa con los racionales, como un recuerdo alude al hecho que se excluye la división por cero, que  $3/0$  o  $0/0$  son expresiones indefinidas y que hay números reales que no son racionales, esto es, no se pueden escribir como cociente de números enteros, como son racionales, esto es, no se pueden escribir como cociente de números enteros, como  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$ ,  $\log(2)$ , y que todo número real tiene una representación decimal, si es racional esta representación es periódica y si es no periódico el número será irracional. Luego indica que los números reales se pueden representar como puntos en una recta, cuando se tratara de un número real positivo, o cuando será negativo, o cero. Ordenando los puntos en la recta.

Además, da algunas notaciones en relación a la unión e intersección de conjuntos, para pasar a la notación de intervalos, abiertos, cerrados..., da reglas de las desigualdades indicando que significa cada una de ellas, para continuar con ejemplos sencillos sobre la resolución de inecuaciones lineales, cuadráticas - con discriminantes que resultan ser cuadrados perfectos y que por tanto la factorización del polinomio cuadrático es casi inmediata, cúbicas que se factorizan como producto de expresiones lineales.

Define el valor absoluto de un número real, como la distancia del número a 0, da las propiedades del valor absoluto, entre ellas. Y cuáles son las soluciones de ecuaciones e inecuaciones que involucran al valor absoluto de un número real.

Enuncia y demuestra la desigualdad triangular, dando ejemplos en el que se usa esta propiedad.

Termina este apéndice con una serie de ejercicios relacionados con lo visto en este apartado. En el segundo texto, el tratamiento de los números reales también se realiza de manera rápida, el primer capítulo referido a Funciones y gráficas, hace mención a la vida y obra de René Descartes, destacando el enfoque analítico que le dio a la geometría.

Además, se menciona la relevancia de tener la gráfica de una función para resolver ecuaciones de la forma  $f(x)=0$ .

En el punto 1.1, referido a funciones y números reales, el tratamiento de estos últimos está en torno a su representación en la recta numérica y a los axiomas de orden.

Definiendo el valor absoluto, dando algunos ejemplos, presentando la desigualdad triangular y su demostración. Luego de ello, define los diferentes tipos de intervalos.

Otro de los textos complementarios en una universidad de la zona es Cálculo de Leithold (Leithold, 1998), que no trata a los números reales.

Un cuarto texto, que se da como texto complementario es Cálculo de Purcell, Varberg y Rigdon, (séptima edición, Purcell, Varberg y Rigdon, 2007). El capítulo cero, está dedicado a los números reales junto con estimación y lógica. El comienzo es similar a la que se da en el texto de Stewart, enriqueciéndose este tratamiento al enunciar la densidad de los números reales, sus consecuencias, como “al lado de un número real hay infinitos racionales e infinitos irracionales” o que un número irracional se puede ir acercando por una sucesión de números racionales.

Además, hace mención a las bondades que tiene el utilizar una calculadora y de las consideraciones que hay que tomar. También a la estimación y del sentido común combinado con aproximaciones de los números.

Hay un párrafo dedicado a la lógica, en particular a teoremas que involucran una implicación y como se demuestran algunos de los teoremas que aparecen al estudiar el Cálculo. Indican el significado de los cuantificadores, dando algunos ejemplos de proposiciones con cuantificadores, demostrándolas o dando contraejemplos. Y por último indica cómo se debe negar una proposición.

Continúa con el tratamiento de ecuaciones e inecuaciones y situaciones que involucren valor absoluto, o a cocientes, a expresiones cuadráticas o racionales. También presenta ejemplos que más adelante se encuentran al dar la definición de límite.

## Conclusiones

El cuestionario aplicado nos da luces sobre la utilización del texto guía por los académicos de nuestra universidad. En este uso se observa una tendencia a considerar el texto como elemento secundario en el proceso de enseñanza aprendizaje, otorgándole un valor relevante a su estatus matemático más que al didáctico. Bajo la consigna de mejorar los aprendizajes de los estudiantes, se hace necesaria una modificación y rediseño del texto inicial, con el objetivo de generar un instrumento que sea consistente en relación al quehacer de los docentes y las herramientas disponibles para el avance curricular y aprendizaje de los estudiantes de Ingeniería, constituyéndose el texto de esta forma, como un puente que permita lograr una transposición didáctica acorde al contexto de cada curso.

En relación al estudio de los textos guía de otras universidades, solo uno de ellos, al dar a conocer la estructura de cuerpo, ordenado y completo, menciona la densidad de los números racionales o irracionales. Al comparar el tratamiento de los textos complementarios con los del texto guía, vemos que hay diferencias en esto, debido a que el texto guía lo hace de manera formal. La mencionada modificación al texto guía, debe contemplar sin duda, una dualidad entre los aspectos formales o matemáticas puros y modelos matemáticos aplicados en diversos contextos, lo cual permitan tanto al profesor como a los estudiantes, dar sentido a la matemática con la cual trabajan en cada una de sus clases, logrando de esta forma, un aprendizaje real de los contenidos en cuestión.

Las dos dimensiones estudiadas nos permiten posicionarnos a la hora de reconstruir el texto guía en pos de mejorar los aprendizajes de las nuevas generaciones de estudiantes de nuestra universidad.

### **Agradecimientos**

Agradecemos la colaboración de la Unidad de Mejoramiento de la Docencia Universitaria, UM-DU, de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, unidad que ha financiado la realización de este estudio. Agradecemos la gentileza de los autores del libro Cálculo Diferencial, a Sara Arancibia y Jaime Mena, quienes han apoyado la iniciativa de reformular su texto para apuntar de mejor forma a las nuevas generaciones de estudiantes de nuestra universidad.

## REFERENCIAS

- Arancibia, S. y Mena, J. (1996). *Cálculo Diferencial para Ingeniería*. Ediciones Universitarias.
- Edwards, C. y Penney, D. (1996). *Cálculo*. Prentice Hall.
- Guzmán, I., Ramos, E. y Mena, A. (2009). ¿Cómo se enseña en la Universidad? El caso de los Números Reales. En Orus P., Zamora L. y Gregori P. (Eds.), *Teorías y Aplicaciones del Análisis Implicativo*. España.
- Hernández, R., Fernández C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica*. Barcelona, España: Paidós.
- Leithold. L. (1998). *El cálculo*. Editorial OUP-Harla. México.
- Plomp, T. (2010). Educational design research: An introduction. En T. Plomp y N. Nieveen (Eds.), *An Introduction to Educational Design Research* (pp. 9-35). Enschede, Países Bajos: SLO.
- Purcell, E. J., Rigdon, S. E. y Varberg, D. E. (2007). *Cálculo*. Pearson Educación
- Stewart, J. (2007). *Introducción al cálculo/Calculus: Early Transcendentals*. Cengage Learning Editores.



## **Anexos**

### ***Respuestas a las preguntas abiertas del cuestionario***

8) Explique o argumente la elección de la pregunta 7)

No lo utilizo

Hay aplicaciones que dependen de la carrera que pueden o no estar incluidas en el texto.

En muchas ocasiones, a los estudiantes les cuesta estudiar del libro pues tiene un nivel matemático alto.

Es claro y preciso en lo que respecta a matemática

Ocasionalmente, puesto que hay ejercicios los cuales tocan la parte más conceptual matemática de la materia, cuando en algunas carreras no es necesario tocar ese tipo de temas, es por ello que es buena fuente de ejercicios pero hay que guiar al alumno para que ejercicios debe realizar de ese libro.

Depende de la carrera

Sí, lo he utilizado muchas veces

En ocasiones no me parece entendible el enfoque del libro respecto de las definiciones y propiedades

Existe correlación entre el programa de estudio de turno y la suficiente profundidad del libro en cuanto a los ejes temáticos. El libro es rico en ciertos ejemplos de aplicación, algo muy valorable en muchas carreras

No ocupo el libro

Tiene los contenidos que aparecen en los programas y trae diversos ejemplos y ejercicios que ayudan a entender de mejor forma la materia

El lenguaje del texto no es accesible para los estudiantes de las últimas generaciones de los cursos de ingeniería, en general, tampoco los ejemplos y ejercicios.

Los contenidos matemáticos son correctos Excelente didáctica y nivel

En general tienen una buena fundamentación matemática. pero en la actualidad considerando la profundidad con que se están desarrollando los temas resulta no muy adecuado como texto guía

12) Explique o argumente la elección de la pregunta 11)

No lo utilizo

Ídem que en 8

Siento que sobrecarga escritura.

No se didáctica y no me interesa pero el libro es bueno

Por lo mismo señalado anteriormente, se puede usar pero guiando al estudiante para que no toque problemas de mayor complejidad los cuales no van de acuerdo a los objetivos de aprendizaje y que además puedan causar frustración en el estudiante.

No me lo he planteado seriamente

tenemos alumnos de otro tipo ahora, no quieren saber el porqué de los procedimientos, etc.

Considero que es un libro que dentro del aprendizaje incluye cierto formalismo matemático, que para ciertas carreras complejiza el aprendizaje de la matemática

No ocupo el libro

El libro es usado como texto guía para carreras de ing civil, ing y carreras de ciencias, siendo que en estos últimos el enfoque del curso es muy distinto a los primeros.