EDU REVIEW | Vol. 10, No. 2, 2022 | ISSN 2695-9917
The International Education and Learning Review / Revista Internacional de Educación y Aprendizaje
https://doi.org/10.37467/gkarevedu.v10.3339

ESTUDIO DE LOS ESQUEMAS CONSTRUIDOS DE RAZÓN Y PROPORCIÓN POR ESTUDIANTES PREUNIVERSITARIOS
Empleo de una secuencia de Enseñanza

Study of the Schemes Constructed of Ratio and Proportion by Pre-university Students: Using a Teaching Sequence

ELENA FABIOLA RUIZ LEDESMA
Instituto Politécnico Nacional, México

KEYWORDS

Cognitive process
Reflective abstraction
Student
High School
Learning
Ratio
Proportion

ABSTRACT

The cognitive action carried out by the student when making use of mathematical concepts in contexts other than the one learned implies the reconstruction of them. This action represents a major difficulty faced by students. The concepts of ratio and proportion were worked on, through a teaching sequence, with a sample of 35 first-semester high school students in Mexico City, which allowed observing the reconstruction of their schemes, supported by the theoretical framework of Reflexive Abstraction. proposed by Piaget. The students were able to argue the solution strategies used in solving problems, which resulted in the modification of their actions.

PALABRAS CLAVE

Proceso cognitivo
Abstracción reflexiva
Estudiante
Nivel medio superior
Aprendizaje
Razón
Proporción

RESUMEN

La acción cognitiva que realiza el estudiante al hacer uso de conceptos matemáticos en contextos distintos al aprendido implica la reconstrucción de ellos. Esta acción representa una dificultad importante que enfrentan los estudiantes. Se trabajaron los conceptos de razón y proporción, mediante una secuencia de enseñanza, con una muestra de 35 estudiantes de primer semestre de bachillerato en la Ciudad de México, lo que permitió observar la reconstrucción de sus esquemas, apoyados en el marco teórico de la Abstracción Reflexiva propuesta por Piaget. Los estudiantes lograron argumentar las estrategias de solución empleadas en la resolución de problemas, lo que dio como resultado la modificación de sus acciones.

Recibido: 10/ 05 / 2022
Aceptado: 12/ 05 / 2022

1. Introducción

Las acciones cognitivas que deben realizar los estudiantes para hacer uso de conceptos matemáticos en contextos distintos al aprendido, conllevan aspectos que implican la existencia de una constitución conceptual matemática y la reconstrucción de los procesos que configuran el concepto constituido; pero llevar a cabo estas acciones es una de las principales dificultades que presentan los estudiantes.

Las capacidades de constitución y reconstrucción de conceptos matemáticos que los alumnos deben tener son parte estructural de la competencia matemática que menciona el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos PISA (por sus siglas en inglés), debido a que se encuentran inmersas en las habilidades que forman parte de esta competencia, como son: «…la capacidad de analizar, razonar y comunicar», así como «…el realizar operaciones y cumplir con ciertos métodos» (OECDE, 2018, pp. 20-21). Se espera que los estudiantes muestren estas habilidades al momento de reproducir, conectar o reflexionar, al enfrentar los distintos problemas que se les presenten en los contextos personal, educativo, laboral, público o científico.

En México, la Secretaría de Educación Pública (SEP), a través de los programas académicos que dan forma al Sistema Educativo Mexicano, intenta promover en los estudiantes el desarrollo de habilidades que les permitan relacionar situaciones cotidianas con los conceptos matemáticos.

Sin embargo, a pesar de este esfuerzo, los problemas del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas persisten; de ello dan cuenta las distintas investigaciones que son realizadas por los centros de investigación como el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional que, a través de su Departamento de Matemática Educativa, enfrenta estos problemas.

En el primer semestre de bachillerato, las razones son usadas por los estudiantes para resolver problemas que involucran situaciones de proporción, incremento o decremento porcentual y funciones lineales (Instituto Politécnico Nacional, 2019). Durante el transcurso de su instrucción académica usan a las razones para resolver problemas de física, biología, medicina, entre otras áreas. Durante su instrucción en las clases de matemáticas y computación del segundo semestre del ciclo escolar 2019-2020, se observó, en las evaluaciones realizadas a los alumnos por parte de sus maestros encargados, que no logran resolver algunos problemas que involucran a la razón y a la proporción.

Con la información proporcionada por lo maestros de matemáticas, se encontró que los estudiantes tienen una idea de razón más cercana a la de un par de números ordenados y con esta idea intentan resolver los distintos problemas que involucra el concepto de razón. En la mayoría de las ocasiones no es explícito el uso del concepto de razón, además de que los alumnos no dirigen su atención a las magnitudes involucradas, sino que su acción primaria se destina a asociar y establecer los dos pares ordenados de números que les permiten hacer uso de la regla de tres, o de la multiplicación cruzada, o identificar (calcular) un valor unitario y sólo multiplicar para obtener un resultado. En ninguna de las acciones anteriores se percibe que haya identificación explícita de una razón y tampoco de la igualdad entre razones como lo es expresado por Colina & Valdiv (2016).

Por lo que los dos principales propósitos de la investigación que se reporta en el presente artículo son, primeramente, identificar los esquemas que son puestos en práctica por los estudiantes cuando hacen uso de su conceptualización de razón y proporción y, en segundo lugar, diseñar e implementar una secuencia de enseñanza que les permita reconstruir las relaciones cognitivas presentes en la razón, proporción y porcentaje.

Haciendo un recorrido por algunas investigaciones que representan el antecedente al estudio reportado aquí, se tiene lo siguiente:

Piaget e Inhelder (2015) realizaron un trabajo acerca del desarrollo del pensamiento lógico, en el que resaltan la importancia del razonamiento proporcional en la constitución de las operaciones formales del pensamiento.

Un hecho que muestra algunas de las dificultades que tienen los estudiantes de educación primaria en la construcción del significado de la idea de razón, es la dificultad para diferenciar situaciones con estructura multiplicativa de situaciones con estructura aditiva (Llinares, Fernández, & Sánchez-Matamoros, 2016; Ivas & Fernández, 2016).

Buforn, Llinares, & Fernández (2018), llevaron a cabo un análisis mediante el cual identificaron y caracterizaron cuatro niveles de desarrollo, para ello, consideraron la manera en la que los estudiantes para maestro identifican e interpretan aspectos del razonamiento proporcional, a partir de las respuestas dadas por estudiantes de nivel básico a problemas proporcionales y no proporcionales. Los cuatro perfiles definidos por los autores de la investigación fueron: Perfil aditivo, asignado a aquellos estudiantes quienes emplean relaciones aditivas entre las cantidades en todos los problemas, fueran o no proporcionales; Perfil proporcional, asignado a aquellos estudiantes que utilizan relaciones multiplicativas entre las cantidades en todos los problemas tanto proporcionales como no proporcionales; Perfil donde influye el tipo de relación multiplicativa, considerado para aquellos estudiantes que responden utilizando relaciones multiplicativas o aditivas, con base en si la relación multiplicativa es entera o no entera; Perfil correcto, para estudiantes que utilizan de forma correcta las relaciones aditivas o multiplicativas en cada tipo de problema, según fuera el caso.

El trabajo de Chaverra (2017) estuvo orientado hacia la resignificación y los usos de las razones y las proporciones, propiciando una vinculación entre la matemática escolar y la matemática de la parte cotidiana de las personas, al presentarle al estudiante actividades en contextos de su entorno.

En la búsqueda de comprobar si la constitución de razón y proporción está bien desarrollada en la escuela secundaria, Serrano, señala que se continúa con la enseñanza de los temas relacionados con los números racionales y comenta que el alumno trae una comprensión errónea de los temas de razón y proporción, y que esto «provoca una distorsión en los conceptos de variación proporcional y función lineal que se abordan en la escuela secundaria» (Serrano, 2017 p. 8).

Por su parte Moreno, Mayorga y Guacaneme (2017) realizaron un estudio en el que enfatizan que muchas veces, tanto profesores como estudiantes, por la necesidad de operar o cuantificar, le quitan el sentido de la comparación relacional a estos elementos matemáticos (la razón y proporción), lo que equivale a quitarles su esencia, por lo que es fundamental rescatar su sentido de comparación entre dos objetos matemáticos, que pueden ser tanto números como magnitudes.

Ahora bien, la investigación desarrollada se ubica dentro de los procesos de aprendizaje; en particular aquellos que suceden durante el tránsito cognitivo que llevan a cabo los estudiantes en los diversos niveles de la comprensión de razón y proporción, así como en la exhibición de las acciones en forma de esquemas con que dan respuesta a los problemas que contienen estos objetos matemáticos. Por lo que, coherente al marco teórico que se presenta más adelante, surgen en consecuencia las siguientes preguntas generales de investigación.

¿Cuáles deben ser los procesos didácticos necesarios que contribuyan a la reconstrucción de los esquemas que son aplicados por los estudiantes a los problemas que involucran los conceptos de razón y proporción?

¿Qué tipo de actividades se deben desarrollar para que los estudiantes logren distinguir y hagan uso de los conceptos de razón y proporción en situaciones donde las relaciones multiplicativas se soportan en las magnitudes?

Este documento consta de cinco secciones, en la primera se expone el problema de investigación, se analizan algunas investigaciones que tratan aspectos del tema de razón y proporción, se plantean las preguntas de investigación y los objetivos. En la segunda, se presentan los fundamentos teóricos que dieron soporte a esta investigación, se muestran las ideas cognitivas de la Abstracción Reflexiva (AR) desarrolladas por Jean Piaget (Piaget, 2001). En la tercera se muestra el diseño de la investigación. En la cuarta se presenta el análisis de la propuesta de enseñanza a través de la AR y, con base en este análisis, se muestra una serie de conclusiones y reflexiones. Se hacen explícitas las aportaciones de la investigación, lo que da pauta a plantear a futuro otras investigaciones emanadas del análisis de los resultados obtenidos.

2. Aspectos teóricos

El marco teórico se fundamenta en los aspectos cognitivos presentes en la teoría de la Abstracción Reflexiva (AR) de Jean Piaget, así como en algunos aspectos de los acercamientos conceptuales de razón y proporción propuestos en la fenomenología de Freudenthal (1983).

Se ubica al trabajo de investigación dentro de los límites del razonamiento proporcional, debido a las distintas acciones cognitivas llevadas a cabo por los alumnos, como son: algoritmos matemáticos multiplicativos, adaptación y asimilación de esquemas del medio ambiente y conciencia meta reflexiva.

Considerando como referencia la definición propuesta por Colina y Valdivé (2018, p. 7), respecto a la razón, que dice: «la razón está definida como la relación entre dos cantidades que tienen dos diferentes unidades de medida»; se aplica esta definición en algunas de las actividades de la secuencia didáctica en las que se trabajan magnitudes como la distancia, el tiempo, la masa o el volumen.

En lo que respecta al caso de la proporción, ésta se entiende como una relación de equivalencia entre dos razones. El estudio de la variación proporcional conduce al estudiante a comprender la relación lineal entre dos magnitudes.

La problemática que encierra la enseñanza y comprensión de la razón, la proporción y la variación proporcional es muy amplia. Cuando el alumno conoce más de estos objetos matemáticos, éstos muestran una mayor complejidad que no se distingue al inicio de su enseñanza o aprendizaje; es decir, cuando la razón es mostrada en un inicio asociada a la división bajo un proceso continuo de construcción y reconstrucción, se va transformando de forma paulatina. Por ejemplo, al normalizar las razones como porcentajes o al ser utilizadas como un medio de comparación entre magnitudes y pasar de medidas absolutas a medidas relativas.

Esto conduce, tanto al que enseña como al que aprende, a generar esquemas distintos de acción a los ya establecidos, para que sean aplicados a la nueva forma adquirida de la razón. Así como llevar a cabo adecuaciones para que esos esquemas sean usados en diversos contextos. El esquema es la unidad mínima de organización mental en la que se encuentra encapsulado un espacio de conocimiento, de acuerdo con la teoría de la Abstracción Reflexiva (AR) de Piaget (Piaget, 2001).

Los esquemas que interesan son los derivados de las acciones y procesos de tipo cognitivo realizados por los estudiantes con un propósito específico, refiriéndose en particular a aquellos que son producto de la asimilación mental en donde se incorporan los objetos de la conducta (Piaget, 1967 [2003] p. 18), y que permiten observar de forma externa el pensamiento del estudiante. A los que llamó Piaget *esquemas de acción*.

Esta estructura se observa en el objeto de investigación; por ejemplo, cuando un estudiante aplica la regla de tres en situaciones de problemas de razón del cuarto valor faltante y realiza una acción, de tal manera que existe una mediación cognitiva con un propósito muy definido, y cuyo interés es conocer el cuarto valor faltante para resolver el problema planteado; entonces se dice, a la luz de la teoría expuesta, que la estructura presente es un esquema de acción.

Por otro lado, si la acción sigue siendo la búsqueda del valor faltante, pero al aplicar el esquema cognitivo el estudiante no reconoce el sentido de la razón que plantea el problema, y no logra identificar el motivo que lo condujo a llevar a cabo esta acción o quizás no logra establecer las relaciones entre las magnitudes involucradas para aplicar dicho esquema y solo aplica la estructura de multiplicación cruzada, entonces el esquema mostrado será un esquema de hábito.

Piaget señala que

> … el estudio de las acciones que dan origen a los distintos tipos de esquemas, se ubica en el inicio de los intercambios entre el medio y el organismo, acciones que realiza el sujeto y que toman la forma de una percepción, un aprendizaje sensorio-motor (hábito, etc.) un acto de comprensión, un razonamiento y que proveen estructura a los intercambios con el medio. (Piaget 1967 pp. 15-16)

Otro esquema aún más usado por los estudiantes en el que se puede observar un esquema de hábito es la acción que entra en operación para obtener un valor faltante, en el caso particular del porcentaje en la forma de economía de acciones. Por ejemplo, cuando se pide al estudiante que obtenga un porcentaje cualquiera de una cantidad determinada de una magnitud y que le sume el valor obtenido. Usualmente, el estudiante realiza la acción de multiplicar la cantidad proporcionada por uno, más el porcentaje requerido (p. e. X cantidad* 1.25) para obtener la respuesta.

Entonces, en primer lugar, las acciones parecidas a la descrita en el párrafo anterior Piaget las describió como una situación económica de la conducta del aprendiz, expresándola como sigue: «los intercambios que provoca con el medio comparten igualmente una forma o una estructura determinante de circuitos que se establecen entre el sujeto y los objetos» (Piaget, 1967, p. 16), es decir que en cada ocasión en que se pide al estudiante —al que Piaget nombra *sujeto cognoscente* y que es traducido aquí como aprendiz— poner en ejecución circuitos, esto consiste en el uso generalizado de la acción de obtener el total de una cantidad más su porcentaje. Acción que de ninguna forma es incorrecta; sin embargo, si al estudiante le resulta imposible descomponer en sus partes a la acción X cantidad * 1.25, y desconoce el origen de esta acción multiplicativa, se tiene entonces que el esquema que exhibe el estudiante es un esquema de percepción.

La Abstracción Reflexiva (AR) se refiere a las acciones de índole cognitivo que realiza el sujeto sobre los objetos, ejemplo de esto es la capacidad de agrupar objetos de una misma cualidad (Piaget, 2001).

De acuerdo con la opinión de González & Roa (2017) sus comentarios muestran la importancia de la aplicación de los estudios teóricos de la AR realizados por Piaget al desarrollo cognitivo y la formación de las estructuras cognitivas en la aplicación a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

La función cognitiva de la AR en el aprendiz consiste en el desarrollo de la habilidad cognitiva del sujeto de proyectar, de repensar, de obtener y de extraer de las acciones o de su coordinación, los procesos de conocimiento.

Piaget (2001) describió los mecanismos por medio de los cuales se lleva a cabo la AR, el primero de ellos se refiere a la abstracción *rèflèchissante*, mejor entendida como reflejante o proyectiva; este mecanismo explica cómo se sucede el paso de un esquema de acción de una estructura inferior a una superior. Por ejemplo, cuando un esquema de acción perteneciente al estadio sensorio-motor es transferido por medio de una proyección a un estadio preoperatorio.

La secuencia de enseñanza se construyó tomando como referencia los puntos señalados de la AR.

3. Métodos y materiales

Se empleó una metodología de trabajo de campo para lo cual se trabajó con una muestra de 35 estudiantes pertenecientes a un grupo de una Unidad Académica de nivel medio superior en la Ciudad de México. Se dividió en tres etapas: la primera correspondió a la fase exploratoria, a través de la cual se observó la permanencia del objeto de investigación en el bachillerato, la cual se dio a través de la conversación con el maestro que impartía las clases y la revisión de las actividades y exámenes resueltos por sus alumnos.

La segunda etapa correspondió al experimento de enseñanza que consistió en diseñar y aplicar la secuencia de enseñanza para construir y reconstruir esquemas de uso que relacionen los constructos de razón y proporción, para lo cual se consideró la opinión de Rogemma (2017), respecto a que los procesos de la producción del conocimiento ocurren a través de la acción del diseño, con base en esta opinión el diseño trató de conducir al estudiante a reconfigurar y en algunos casos ampliar, su concepto de razón. Esto, a través de actividades que lo lleven a reflexionar sobre las acciones que realiza cuando se enfrenta a los distintos tipos de problemas que involucran a la razón.

La tercera etapa se caracterizó por el análisis retrospectivo de los datos para la presentación de conclusiones.

2.1. Etapa 1 Fase exploratoria

Con el propósito de corroborar la existencia y tipo de deficiencias en el uso de razón y proporción por parte de los estudiantes; se llevó a cabo la primera etapa.

2.1.1. Muestra participante

Se trabajó con un grupo conformado por 35 estudiantes que cursaban su segundo semestre en un Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos del Instituto Politécnico Nacional (CECyT-IPN) y cuyas edades oscilaban entre 15 y 16 años.

A los estudiantes se les informó del rol de su participación y la intención de la investigación, para lo cual fue necesario contar con autorización escrita de parte de sus padres para poder grabar las sesiones de trabajo en formato de video o solo voz.

El procedimiento que se usó en esta primera etapa consistió en revisar los exámenes aplicados (por el maestro encargado) al grupo estudiantes.

De esta fase se encontró lo siguiente:

Se logró observar que los alumnos ostentan menos dificultades en identificar a la razón cuando es completamente explícita, que cuando no lo es, es decir, se les dificulta identificarla cuando se muestra como una relación entre magnitudes en el planteamiento contextual del problema. También se observó que los alumnos tienen dificultades al tratar de hacer la distinción de las relaciones que hay entre las razones involucradas. Además, para los alumnos la incomprensión de la razón es mayor si las razones están asociadas en el contexto a otras áreas del conocimiento.

2.1. Etapa 2 Secuencia de Enseñanza

2.1.2. Descripción de la secuencia de enseñanza

La secuencia didáctica se compone de cinco actividades, las cuales se desarrollaron en el salón de clases, el tiempo invertido fue de 2 horas por día, con un total de 40 horas (cinco días a la semana durante cuatro semanas).

Los componentes de la estrategia didáctica que están presentes en cada actividad son los siguientes: situaciones contextuales en donde se muestra la presencia de la razón como comparación entre magnitudes, preguntas, espacios para plasmar sus conclusiones y hacer operaciones, tablas para llenar y espacios para graficar los datos. Por último, intercambios de información entre los alumnos participantes —lo que es conocido como «discusión dirigida»— modelo que está presente en todas las actividades de la investigación.

La construcción de las actividades se llevó a cabo desde una perspectiva evolutiva; conforme a lo que señala la teoría de la AR, que la adquisición del conocimiento es un proceso en el que un concepto va de un nivel previo (nivel inferior) a uno subsecuente (nivel superior). Proceso al que nombró Piaget *proyección* y que forma parte de las estructuras cognitivas específicas de la AR (Piaget, 2001).

La secuencia de enseñanza inició conduciendo al alumno a observar las relaciones masa-volumen de algunos objetos presentes en el ámbito físico, posteriormente se mostraron algunas relaciones que existen entre una magnitud física y una magnitud abstracta y, finalmente, se condujo a los alumnos a que experimentaran las relaciones de magnitudes abstractas.

En la primera actividad de la secuencia de enseñanza, la acción cognitiva esperada en el alumno, fue inducirlo a que lograra observar que existe una relación que se mantiene constante, como es el caso de la masa de un tornillo y su volumen, o la masa del agua y el volumen del agua; además de que siempre conservan la misma relación cuando están presentes los mismos objetos.

Con esta perspectiva, la primera actividad puso en contacto al alumno con la relación de las magnitudes masa y volumen (m:v) de forma física y en condiciones de laboratorio. De esta manera, las distintas acciones que llevó a cabo, como el introducir un objeto (p.e. una tuerca, piedra, etc.) dentro de un recipiente que contiene un líquido (agua, en este caso), le permitió observar y anotar el volumen desplazado, así como el peso de los objetos usados en cada momento, con lo que estableció la razón masa a volumen, del tipo mencionado antes.

Estas transiciones entre procesos requieren, en cada nueva proyección, una reconstrucción en los grados superiores, sobre cómo fue dado en los niveles inferiores, con el fin necesario de que no sean idénticas (Piaget, 2001).

En la segunda actividad, se introdujo gradualmente al alumno en la comprensión del concepto de razón entre magnitudes, se promovió la atención hacia la relación entre los objetos empíricos, llamados «bienes de consumo» y la magnitud dinero. Sin embargo, a diferencia de los objetos físicos, la magnitud dinero cambia conforme al país que le otorga su denominación, característica que se observa en los nombres y valores de cada moneda que es emitida por su país de origen. En el ítem 2.1 de la segunda actividad se presentó una tabla y se proporcionó a los alumnos la equivalencia entre los países participantes, por ejemplo: de yen japonés a euro y de euro a yen japonés (ver Figura 1), las proporciones son directas y unitarias, por lo que se pretendía que el alumno hiciera evocaciones de sus esquemas de proporción directa. Además, se buscó promover en el alumno la comprensión de las relaciones de equivalencia entre distintos tipos de monedas sin hacer preguntas explícitas y solo con el llenado de tabla.

Figura 1. Solicitud de llenado de tabla para determinar las equivalencias

SEGUNDA ACTIVIDAD:

2.1 En la siguiente tabla se muestra el valor de intercambio equivalente aproximado de cada moneda. Con los datos que se proporcionan completa la siguiente tabla.

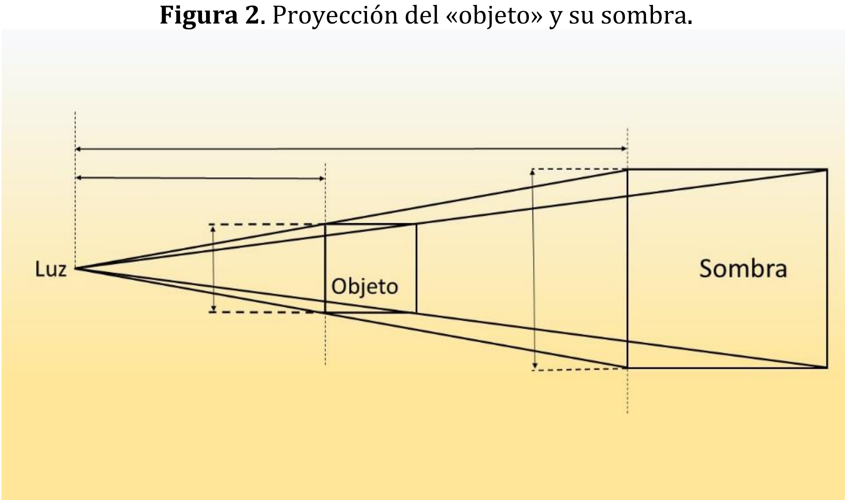
	Euro (€)	*Dólar Ame.($)*	*Peso Méx. ($)*	*Yen Jap. (¥)*	*Peso Col.($)*
1 Euro	1	1.32	17.27	137.04	2546.9
1 Dólar Ame.	0.758				
1 Peso Méx.	0.058				
1 Yen Jap.	0.0073				
1 Peso Col.	0.00039				

Fuente: Elaboración propia.

A partir de las tablas obtenidas se pidió al alumno que graficara algunos de los datos por pares de monedas. La actividad concluyó con cinco preguntas; dos de ellas dirigidas a la interpretación que hizo el alumno de las gráficas que obtuvo cuando usó los datos de los intercambios monetarios y, tres preguntas cuyo fin fue hacer reflexionar al alumno sobre las relaciones de equivalencia que realizó durante la actividad.

En la tercera actividad, se consideró conducir al alumno a asociar la proporción con los datos de la homotecia, el estudiante debió, en primer lugar, obtener las razones de las figuras, con el fin de que al momento de comparar las razones y observar que son iguales, lograra dar respuesta a preguntas explícitas acerca de la proporción (Figura 2).

Figura 2. Proyección del «objeto» y su sombra.



Fuente: Elaboración propia.

En la segunda parte de esta tercera actividad, el alumno debía recurrir a la experiencia anterior y recordar los procedimientos realizados en ella, además de considerar que cada elemento de la nueva figura le era útil para poder responder a los cuestionamientos planteados en esta actividad (Figura 3).

Figura 3. Cuestionamientos relacionados a las figuras construidas

4.2 Forma pares ordenados con los datos obtenidos, con las siguientes características, la medida del lado del «objeto» es al lado de la «Sombra» (LfO es a LFS), ahora ordena las distancias, distancia del «objeto» al punto de luz así como la distancia del punto de luz a la «sombra» (dpLFO es a dpLFS)
4.3. Realiza las operaciones para obtener los cocientes de las razones, el resultado obtenido aproxímalo a una centésima.
4.4 ¿Podemos decir que estas figuras son proporcionales entre sí? Si No

Fuente: Elaboración propia.

Para finalizar la actividad, se pidió al alumno que construyera una expresión algebraica que le permitiera calcular la altura y la distancia de cualquier objeto o sujeto que se acercara o se alejara al punto central de la figura, la cual permitiría observar si el estudiante había iniciado un proceso de generalización de la proporción. Conforme al marco teórico, esta acción sería un indicio de una construcción metacognitiva.

La cuarta actividad de la secuencia de enseñanza tuvo como finalidad que el alumno extrajera de una situación cotidiana los elementos necesarios e hiciera las evocaciones correspondientes; esperando que aplicara la razón y sus sub-constructos, tomando prestado el lenguaje usado por Vergnaud (Alfaro & Fonseca, 2016), para responder a los cuestionamientos planteados en los ítems.

Al inicio de la actividad se introdujo al alumno a los contextos que se estudiarían, uno en el área de la Economía y otro en el área de la Física. En la actividad del contexto económico, el alumno debía lograr establecer las relaciones porcentuales a partir de datos que no estuvieran relacionados directa y explícitamente (Figura 4). Además, la pregunta: *Explica por qué*, que acompañaba al ítem, conducía al alumno no solo a tratar de establecer las relaciones numéricas comparativas, sino también a reflexionar sobre las magnitudes involucradas.

Figura 4. Ítem ante penúltimo de la primera actividad donde se pide al alumno compare los PIB de México y Tanzania.

El crecimiento del PIB para Tanzania es de 7% y para Estados Unidos de 2.3%,

1.5 ¿El crecimiento económico del PIB de México es mayor que el de Tanzania, en millones de dólares?

Si: ____________ No: ____________

explica porque: ____________

No uses más de diez palabras.

Fuente: Elaboración propia.

En la segunda parte de la activad, se enfrentó al alumno a las relaciones entre distancia, tiempo y velocidad, el único dato explícito que se le proporcionó fue la velocidad promedio, y se esperaba que lograra hacer inferencias para contestar los ítems.

En esta parte del ejercicio, además de observar la permanencia de los esquemas desarrollados o reconstruidos, el alumno debía dirigir el esfuerzo cognitivo a la estructura de asimilación de los esquemas de uso, algunos de los ítems hacían referencia a las situaciones de procesos inversos en el porcentaje y de proporciones compuestas.

El inicio de la última activad condujo al alumno a fijar su atención en la correlación que existe entre la interpretación numérica y gráfica de las relaciones proporcionales entre dos magnitudes. Se consideró que para que el estudiante lograra responder a los planteamientos iniciales de la actividad, debería recurrir a los esquemas, que en algunos casos había logrado transformar, o usar los ya constituidos. Las acciones cognitivas que había estado realizando con anterioridad, debían permitirle interpretar datos que contuvieran una o dos unidades.

Desde la interpretación de la AR, invitar al estudiante a considerar a través de la reflexión que la relación de proporción que existe entre las magnitudes, además de relaciones multiplicativas, también tienen un referente gráfico, y que la gráfica que se obtiene es una recta cuando la relación es de proporcionalidad, lo que permite llevar a cabo diversos procesos cognitivos.

Para este fin se pide al alumno de forma explícita que obtenga los cocientes de los datos de la tabla y que con sus propias palabras explique lo que para él significa el valor constante que aparece en los cocientes.

En esta quinta actividad también se condujo a los alumnos a la comprensión de la proporción vista a través del contexto, y a observar las adecuaciones de los esquemas que mantiene de la proporción para dar solución a los problemas presentes en la actividad, considerando que los procesos reflexivos que lleva a cabo lo conducen a la meta reflexión, lo que se observaría cuando diera respuesta al ítem 3.6. (Figura 5).

Figura 5. Espacio destinado a la construcción de la expresión algebraica.

3.6 Desarrolla una expresión algebraica que nos permita calcular cualquier cantidad de maíz en relación a las hectáreas sembradas.

Fuente Elaboración propia.

De acuerdo con Fraisse (1963), se consideró que «la escasa generalización de que dan muestra los sujetos es uno de los problemas que se debe tratar de corregir a través de la reconstrucción de esquemas de uso» (citado por Piaget, 1971, p. 11). Es por esto que algunas actividades de la secuencia de enseñanza se enfocaron a que el alumno realizara acciones de generalización con distintos elementos cotidianos; como pueden ser las relaciones costo/beneficio que son parecidas a las relaciones costo/distancia y, que cuando el estudiante comparara los algoritmos que ha desarrollado y usara estas relaciones, pudiera resolver problemas donde las relaciones multiplicativas presentes se aplican a las distancias recorridas por un avión, o también, las relaciones que existen entre el producto interno bruto (PIB) respecto al número de habitantes de un país.

3. Resultados y análisis

Se centró la atención en los procedimientos utilizados por los alumnos, en sus comentarios acerca de las causas que promueve la estrategia a seguir para la solución de las actividades, en las conjeturas grupales a las que llegaban respecto a la forma de abordar un ítem, y finalmente, en observar si los alumnos participantes en la investigación cambiaron, adaptaron o revisaron sus procedimientos para abordar los distintos planteamientos expuestos en los ítems.

Durante el desarrollo de la primera actividad se buscó que los alumnos identificaran la razón que existe al comparar las magnitudes de masa y volumen en la actividad, además de observar si existe alguna regularidad o la presencia de algún valor constante.

Las razones presentes en la actividad se lograron observar cuando los estudiantes establecieron la relación que hay entre la medición del desplazamiento del agua cuando se introducen diversos objetos y, la obtención del peso de cada uno de los objetos cuando están dentro del líquido contenido en un recipiente.

En la Figura 6 se muestra la tabla que el estudiante llenó con la obtención de los valores faltantes que podían corresponder al volumen o al peso del agua.

Se observa, en la Figura 6, que los datos que obtienen 3 de los 35 alumnos en la Tabla 3.1, correspondiente a la actividad 1, es decir, el 8.6%, son inconsistentes. Estos alumnos no percibieron que si aumenta el volumen del agua debería aumentar el peso del agua.

Los 32 estudiantes restantes (91.4%), al parecer se dieron cuenta de que, a mayor peso, mayor volumen, porque al proporcionar como dato en la tabla del ítem 3.1 el peso del agua, obtuvieron el volumen aproximado a dicho peso, lo que mantiene la relación proporcional de la masa-volumen del agua.

Figura 6. Datos de la medición de peso y volumen del agua.

3.1 Completa la siguiente tabla, anotando las lecturas que te proporciona la balanza digital por cada vez que se agrega agua al recipiente

Agua	Med. 1	Med. 2	Med. 3	Med. 4	Med. 5	Med. 6	Med.7	Med. 8	Med. 9
Peso (gr)	71.6 320.6	298.5	~~66~~ 315	307.7	320.8	~~83~~ 332	331	334.5	~~98~~ 347
Volumen (cm^3)	40	57	63	76	79	80	89	92	103
	71.6	49.5	66	58.7	71.8	83	82	85.5	98

Fuente: Elaboración propia.

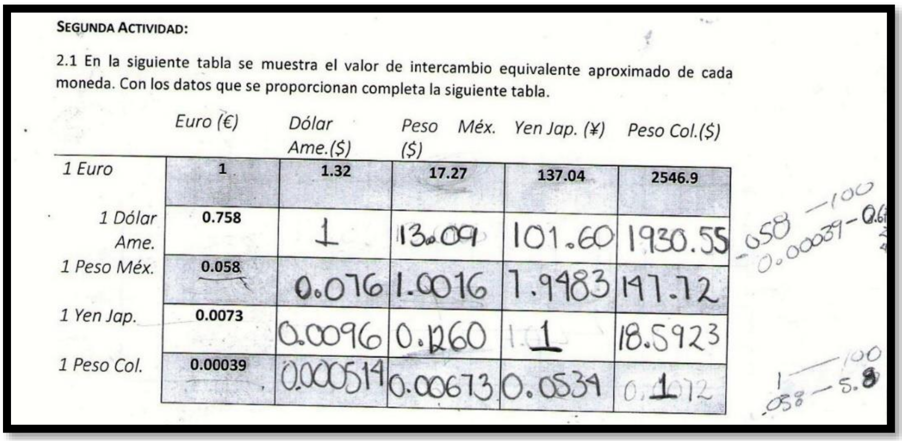
Al parecer, los alumnos intuyeron que existe una relación directa entre el volumen y agregar agua al recipiente, además de que dieron importancia al peso del agua e identificaron la relación entre el agregar agua al recipiente y el cambio del peso que se muestra en la balanza, o cuando en la tabla se proporciona el peso del agua.

Conforme al marco teórico, el tipo de esquema formado en los estudiantes de la muestra en este primer acercamiento (actividad 1 de la secuencia de enseñanza), correspondió a un esquema de acción, ya que respondieron a situaciones de razones en forma de división.

En la segunda actividad el alumno se enfrentó a la obtención de equivalencias monetarias, esta actividad se llevó a cabo por medio de tablas de doble entrada, las cabeceras de las columnas y las filas de la tabla contenían las denominaciones monetarias de cada país.

Se observó que el 82% de los estudiantes resolvió las equivalencias solicitadas en la tabla, para lo cual realizaron un planteamiento de proporción unitaria (ver Figura 7), lo que les permitió llevar a cabo multiplicaciones que les sirvieron para validar sus respuestas.

Figura 7. Aquí se muestra la razón unitaria de las dos alumnas que consideraron al encabezado de la fila tomando el valor del dólar americano respecto al euro.



SEGUNDA ACTIVIDAD:

2.1 En la siguiente tabla se muestra el valor de intercambio equivalente aproximado de cada moneda. Con los datos que se proporcionan completa la siguiente tabla.

	Euro (€)	Dólar Ame.($)	Peso Méx. ($)	Yen Jap. (¥)	Peso Col.($)
1 Euro	1	1.32	17.27	137.04	2546.9
1 Dólar Ame.	0.758	1	13.09	101.60	1930.55
1 Peso Méx.	0.058	0.076	1.0016	7.9483	147.72
1 Yen Jap.	0.0073	0.0096	0.1260	1	18.5923
1 Peso Col.	0.00039	0.000514	0.00673	0.0534	1

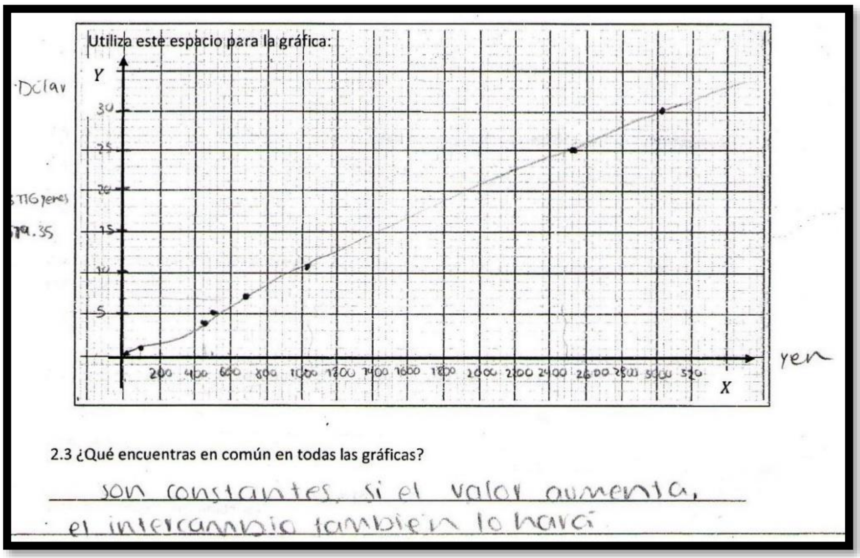
Fuente: Elaboración propia.

El 6 % de los estudiantes lo intentó a través del uso de la regla de tres haciendo uso del porcentaje, y el 12% no mostró ninguna operación.

Las acciones realizadas por la muestra de estudiantes, para obtener las cantidades que se solicitaban en el ítem 2.2. fueron más allá de ser proporciones directas, ya que extendieron su idea de proporciones compuestas y asociaron las relaciones multiplicativas para completar la tabla.

Con relación al ítem 2.2., el 50% de los estudiantes construyó su gráfica con los valores obtenidos en las tablas. Además, ante la pregunta explicita: ¿qué encuentran en común en todas las gráficas? se observó en su respuesta el inicio o la evocación de una idea de proporción, como se puede observar en la Figura 8.

Figura 8. Ejemplo de la gráfica.



Fuente: Elaboración propia.

Desde el punto de vista de la AR, lo que se observa es la adaptación de sus esquemas previos a los nuevos problemas, pero esto no significa que hayan construido un nuevo esquema, parece ser que mantienen en uso su esquema multiplicativo; pero el tratar de adaptar este esquema implicó la posibilidad de que el alumno lograra reconstruir o transformar el esquema en uno nuevo, que le permitiera atender las situaciones de equivalencia y que lo condujera a la proporción.

Los problemas de los ítems 3.2.1 y 3.2.2 requerían para su solución que los estudiantes recurrieran a sus esquemas de uso con que resuelven los casos de porcentajes directos. El 52 % de los alumnos mostró operaciones en la hoja de trabajo, mostrando también un esquema reducido de la adición del porcentaje a la cantidad con que inicia sus cálculos en su moneda local (Figura 9).

Figura 9. Ejemplo de su esquema reducido.

.16 × 12

A+(A*%)

0.72

Año 2013 – 2014	Alemania	USA	México	Japón	Colombia
Costo (moneda local) más incremento de 16%	15.3	3.82	1.22	126.98	8.14
Costo Total para las 12 personas por país	183.6	45.84	14.64	1523.76	9768

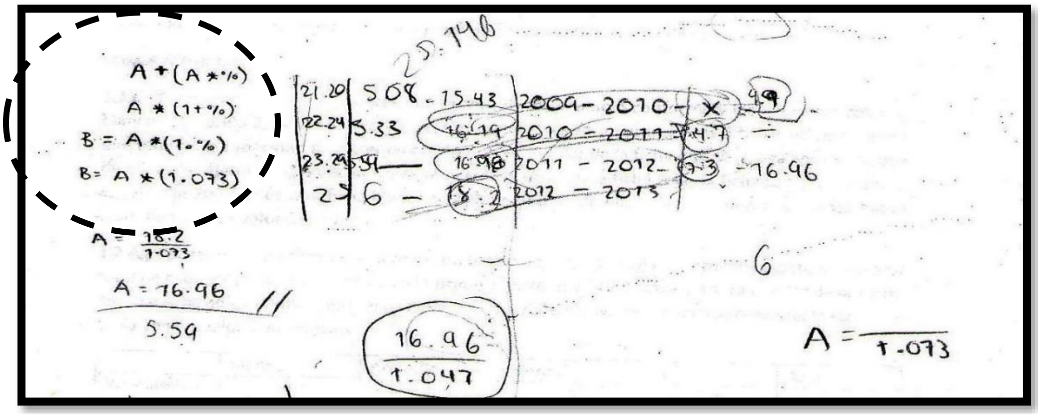
Fuente: Elaboración propia.

Para realizar sus cálculos, cada alumno consideró la frase costo (moneda local) como el costo del uso monetario del país que obtuvo desde la primera actividad. Una vez que obtuvieron el porcentaje, el resultado generado lo adicionaban al valor inicial y así tenían una nueva base para hacer el siguiente cálculo.

El ítem 3.2.3 es un problema en el que, para su solución, los alumnos realizaron una operación inversa del porcentaje, lo que implica que el esquema que han desarrollado debe ser susceptible de descomponerse y reintegrarse en las partes previas que lo componen.

La estrategia que siguió la mayoría de los estudiantes es la que se muestra en la Figura 10. Además de que se ve el ordenamiento que hacen de los datos del problema; también es posible observar el procedimiento que siguieron. Al leer de arriba-abajo los datos que se observan en el óvalo punteado de la Figura 10, se aprecia que al seguir este procedimiento obtuvieron el porcentaje de un valor A y el resultado obtenido lo sumaron a A, acto seguido lo factorizaron, posteriormente lo igualaron a un valor que designaron como B y finalmente colocaron dentro del paréntesis el valor del porcentaje, ya sumado a uno.

Figura 10. Ejemplo donde se muestra la descomposición del esquema de porcentaje.



Fuente: Elaboración propia.

La tercera actividad fue resuelta por los alumnos con sólo medir las longitudes de las imágenes del acercamiento. Los errores cometidos se atribuyen a la falta de precisión de las herramientas con que tomaron las medidas. En lo que respecta a la proporción, en la mayoría de los casos el esquema de multiplicación cruzada fue el más usado, y como se mencionó en el marco teórico, el estudiante no logró establecer las relaciones entre las magnitudes involucradas para aplicar un esquema de acción y sólo aplicó la estructura de multiplicación cruzada, entonces el esquema mostrado fue un esquema de hábito.

En la cuarta actividad se observó que los alumnos hicieron evocaciones de la fórmula de v=d/t, situación que no les causó interés más allá de resolver numéricamente las actividades por medio de la regla de tres, por lo que nuevamente usaron un esquema de hábito, además de que con esta acción, le están quitando su esencia tanto a las razones como a las proporciones, tal como lo señala Moreno et. al. (2017).

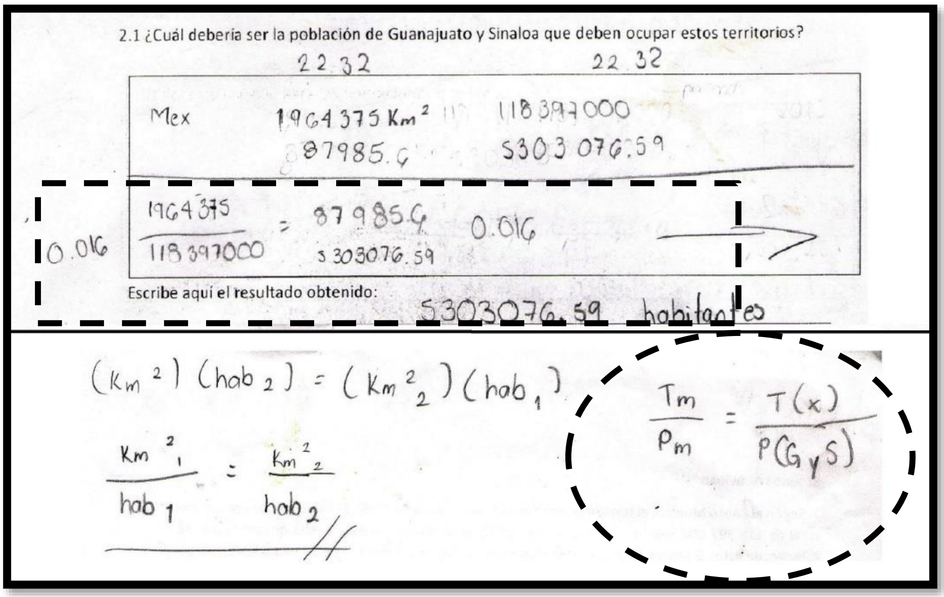
De la actividad del producto interno bruto (PIB), plasmaron sus operaciones con el esquema de regla de tres, pero ahora con relación a la unidad, lo que implicó una reducción de acciones, sin mostrar mayor esfuerzo cognitivo. Por lo que el desarrollo de esta actividad por parte de los alumnos, no aportó más elementos para la observación de la reflexión o abstracción que se buscaba en la investigación.

Se decide continuar con el análisis de la quinta actividad debido a que, en la tercera y cuarta actividad, no se aportó nada nuevo en cuanto a la modificación del esquema de regla de tres, que fueron las acciones que mantuvieron en sus operaciones.

En la quinta actividad se pretendió promover en el estudiante aspectos como la reflexión acerca de la relación magnitud-porcentaje, así como decidir acerca de cuál debería ser la estrategia para dar solución a esta actividad.

En el ítem 2.1 de la quinta actividad se preguntó ¿Cuál debería ser la población de Guanajuato y Sinaloa que deben ocupar estos territorios? En este ítem, los alumnos debían recurrir a los datos que se proporcionaban en el enunciado del inicio de la actividad. Además, para su solución se requería que los alumnos pusieran en práctica sus estrategias para establecer la razón que relaciona la población con su territorio (Figura 11).

Figura 11. Aquí se muestra encerrado en un cuadro punteado la regla de tres como primera estrategia para solucionar el ítem y en la cara contraria de la hoja (separada en la figura por una línea recta), encerrado en un círculo, la relación de equivalencia para obtener la proporción.



Fuente: Elaboración propia.

Se dieron distintos aspectos del proceso de reflexión que llevaron a cabo los estudiantes; en primer lugar, su esquema de regla de tres no logró adaptarse al problema, hecho que se explica conforme al marco teórico, también se observa que varios de los alumnos presentaron un desequilibrio cognitivo, por lo que no lograron tomar la decisión de considerar un resultado u otro. Por este motivo, fue necesario que el profesor interviniera y les mostrara la posibilidad de usar las magnitudes para formar su equivalencia y, posteriormente, hacer uso de sus valores numéricos, estrategia que dio como resultado el reacomodo de sus ideas acerca de la proporción.

Una vez aceptada por todos los participantes la nueva estrategia, se observó que los alumnos lograron mover su esquema de regla de tres a un esquema donde la equivalencia está formada por magnitudes; o como sucede en este caso, las unidades con que se interpretan las magnitudes. Con base en la evidencia se consideró que los estudiantes lograron transitar de un estado de reflexión a otro, por lo que, de acuerdo a la Abstracción Reflexiva, lograron llevar a cabo un proceso cognitivo de un nivel inferior a uno superior, mostrando el uso de sus esquemas de acción.

En este ítem, respecto a las acciones que plasman en la actividad, el 100% de los estudiantes de la muestra agregaron a los pares ordenados las unidades de las magnitudes, «g» y «s» para identificar a Guanajuato y Sinaloa; en otros casos «h» y «hab» por habitantes, «t» por territorio o «pob» por población, lo que indica un cambio de opinión respecto a cómo perciben las relaciones que forman para establecer la proporción; es decir, ya incluyeron las unidades con que son identificadas las magnitudes, lo que no estaba sucediendo en los acercamientos previos. También, dos tercios de la muestra de estudiantes presentó a la proporción por medio de las unidades con que se expresan las magnitudes y no con los valores numéricos.

Para resolver los ítems 2.2 y 2.3, la estrategia que siguieron los estudiantes fue buscar la relación que existe entre el total del área de México y el total de sus habitantes para compararlas con las áreas obtenidas de los estados juntos de Sinaloa y Guanajuato y la suma del número de habitantes de ambos estados. Estas acciones se observan en el transcurso del siguiente diálogo:

> Estudiante A: bueno ya tenemos la fórmula, ¡no!
>
> Estudiante B: no, porque debes considerar los porcentajes…

Estudiante C: hice una proporción de nuevo… se supone que ya tienes el valor de cuánto te dio, ¡no! Esto es lo que te da acá arriba, los ochenta y siete mil, te dio cinco millones y tantos… luego dice que ciento tres mil es sobre… ¿de dónde saqué ciento tres mil?...

Estudiante A: a ver, en un territorio de ochenta y siete mil novecientos (da la cifra completa).

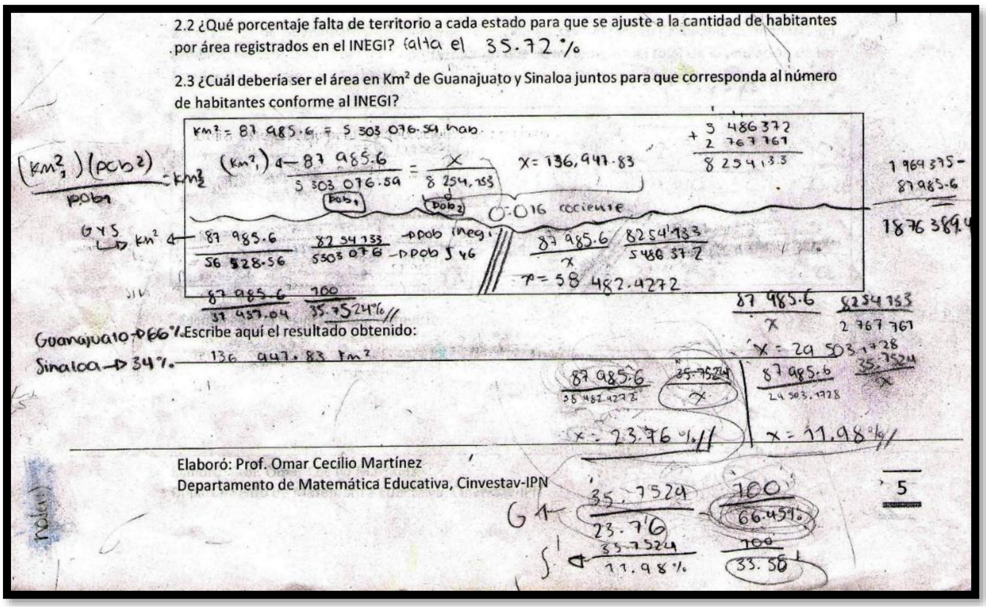
Estudiante B: quiere decir que es el que teníamos anteriormente.

Estudiante C: nosotros tenemos que hay una población de cinco millones trecientos… (da la cifra completa, este alumno está leyendo de nuevo el enunciado del ítem 2.2 y comenta que deben sumar los valores en ambos) si se supone que…el total sumamos los valores… el total de la población de ambos… (hace la suma de los datos que proporciona el ítem, para establecer la comparación entre las áreas y los habitantes de Guanajuato y Sinaloa respecto al total del ítem 2.1). (Diálogo entre tres estudiantes de la muestra).

En el audio se logra escuchar el procedimiento que han seguido para responder al ítem 2.2; establecen la proporción y obtienen el resultado de la relación equivalente entre las áreas y los habitantes, se responde a la vez el cuestionamiento del ítem 2.3.

Veintinueve de los 35 estudiantes de la muestra, al responder el ítem 2.2 coinciden que la respuesta es 35.72%, de ellos 18 muestran todas las operaciones que realizan para llegar a esta conclusión, los procedimientos que usa son: establece la proporción con los valores numéricos, indicando claramente cuál es el lugar de la incógnita, además muestran un despeje con las unidades con que operan estas magnitudes; muestran también la razón de 0.016, que es igual a la razón que se obtiene con los resultados del ítem 2.1, corroborando para ellos mismos que el resultado, la proporción y el análisis dimensional son correctos (Figura 12). De los 6 alumnos restantes, el resultado de uno de ellos no coincide y el otro estudiante no escribe resultado alguno para este ítem.

Figura 12 En esta figura se observa el despeje de los kilómetros que corresponden Guanajuato y Sinaloa, además de la colocación de la incógnita tanto en el denominador como en el numerador y las relaciones porcentuales.



Fuente: Elaboración propia.

Lo que ahora es evidente es que el 83% de la muestra de estudiantes usó las razones explícitamente, ya sea km^2/km^2 o km^2/hab. Además, igualó explícitamente estas razones y resolvió la proporción despejando la incógnita. A diferencia de los acercamientos anteriores donde aplicaban la regla de tres exitosamente, pero sin relacionarlas con la igualdad de razones y unidades respectivas, lo que se acerca más a lo que enfatizan en su estudio Moreno et. al. (2017).

4. Conclusiones

Al inicio de la secuencia de enseñanza se observó que la falta de reflexión por parte de los estudiantes sobre cómo resolver los problemas que involucran a los objetos matemáticos de razón y proporción, los condujo a aplicar en la mayoría de los casos, esquemas que no necesariamente se aplican a esos casos, por ejemplo: el uso de la multiplicación cruzada para todos los problemas de proporción.

Otro error común que se encontró fue la economía de acciones, lo que se logró observar con el uso que hacían de la regla de tres, cuando la equivalencia implica que en uno de los cuatro componentes está presente la unidad, los alumnos recurrían a realizar una multiplicación convirtiendo la proporción en una multiplicación binaria. Pero el uso de este esquema, que les resultó eficiente, no implicó que hubiera mediación cognitiva, además de que su uso no resolvió el problema, donde la solución era una proporción inversa.

La economía de acciones más común fue, en un principio, lo que se observó con el uso del porcentaje; la mayoría de los estudiantes usó el esquema de la multiplicación de alguna cantidad por el valor decimal que representa el porcentaje, esto de forma directa y sin llegar a plantear la proporción; en ocasiones multiplicaban por la unidad más el valor decimal, para convertir la obtención del porcentaje en un proceso multiplicativo de acumulación. Aunque el uso de la economía de acciones en sí misma no constituye un problema, la falta de reflexión sobre cuándo se debe usar y cuándo no, condujo al alumno a obtener resultados incorrectos. Otra acción algorítmica fue intentar regresar a usar los métodos de solución que venían realizando, se hace referencia a que los alumnos hacían regresiones a sus métodos antiguos, ya fuera la multiplicación por la unidad, regla de tres o la economía de acciones del porcentaje. Cuando la actividad no les implicaba un esfuerzo y desequilibrio cognitivo el proceso inmediato que aplicaba el alumno, correspondía a una adaptación del esquema al problema; aunque el problema no se resolviera por el método usado y que en palabras coloquiales se diría que más o menos resolvió el problema, que tenía la idea, pero lo que se observó, a través de la investigación, es que los esquemas mostrados están incompletos, por lo que no se debe dar por concluida la actividad.

Conforme fueron avanzando con las actividades, los alumnos desarrollaron esquemas para resolver problemas en los que los objetos matemáticos de razón y proporción estaban presentes, en ocasiones de forma explícita y otras veces de forma implícita.

Haber iniciado la secuencia de enseñanza a partir de la relación física de dos magnitudes resultó poco adecuado debido a que los alumnos no tenían una idea clara de razón como comparación de magnitudes, y los problemas de proporción, como ya se dijo antes, los resolvían básicamente con sus esquemas de multiplicación cruzada.

La propuesta de enseñanza promovió la reflexión y, en consecuencia, la reconstrucción de los esquemas mencionados y que son susceptibles de ser descompuestos en sus partes como sucedió con la actividad de la producción de maíz, en que era necesario que los alumnos desarrollaran estrategias para determinar las cantidades que debían usar cuando cambiaba el todo de posición en el problema.

Por último, se considera que en investigaciones a futuro se debe replantear el diseño general de la secuencia de enseñanza en el sentido de iniciar la investigación a partir de ejercicios que obliguen a los alumnos a reflexionar desde un principio sobre la participación de las magnitudes y el análisis dimensional. Y continuar con las ideas de observar los procesos de la AR para plantear nuevas actividades que busquen promover la reflexión sobre el uso de los objetos matemáticos en general y, en particular, los que se han estudiado en esta investigación.

Agradecimientos

Los autores agradecen al Cinvestav-IPN, a la SEPI-IPN, a COFAA y a EDD por el apoyo brindado.

Referencias

Alfaro-Carvajal, C. & Fonseca-Castro, J. (2016). La teoría de los campos conceptuales y su papel en la enseñanza de las matemáticas. *Uniciencia, 30*(1), 17-30.

Buforn, Á., Llinares, S., & Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista mexicana de investigación educativa, 23*(76), 229-251.

Colina, M., & Valdivé, C. (2016). Estudio de los esquemas conceptuales asociados a la evolución histórica de las definiciones de razón y proporción.

Colina, M. y Valdivé, C. (2018). Las definiciones de razón y proporción: Parte I La historia. *Premisa, 20*(78), 5-21.

Chaverra, R.C. (2017). Resignificación del uso de las nociones de razón, proporción y proporcionalidad con estudiantes del grado séptimo (12 – 17Años). [Tesis de Maestría]. Universidad de Medellín, Colombia.

Dubinsky, E., Arnon, I., Cotrill, J., Oktac, A., Roa, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory*.

Fraisse, P. (1963). *The psychology of time*. Harper & Row.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phonomenology of Mathematical Structures*. D. Reidel Publishing Company

González-Rojas, D., Roa-Fuentes, S. (2017). Un esquema de transformación lineal: construcción de objetos abstractos a partir de la interiorización de acciones concretas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 35*(2), 89-107, https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/324224

Instituto Politécnico Nacional. (2019). *Programa de estudios de la Unidad de Aprendizaje de Álgebra*. CECyT Miguel Othón de Mendizabal, Ciudad de México: IPN.

Ivars, P., & Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Educación Matemática, 28*(1), 9-38.

Llinares, S., Fernández, C. y Sánchez-Matamoros, G. (2016). Changes in how prospective teachers anticipate secondary students' answers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 12*(8), 2155-2170.

Moreno, R., Mayorga, R., & Guacaneme, E. A. (2017). Perspectivas teóricas de la razón, la proporción y la proporcionalidad como relaciones de comparación, En REDUMATE, Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe (Ed.), *II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe* (pp. 1-8). Comité Interamericano de Educación Matemática.

OECD. (2018). *OECD Programme for Intenational Student Assessment (PISA)*. OECD. http://www.oecd.org/pisa

Piaget, J. (1967). *Psicología de la Inteligencia* (2ª Ed.). (J. C. Foix, Trad.). Crítica

Piaget, J. (1971). *Problemas del Tiempo y la Función*. En J. B. Grize, N. Bogaert-Rombouts, N. Meylan-Backs, F. Orsine, J. Piaget, K. Henry (Ed.), *La Epistemología del Tiempo*. (pp. 157). El Ateneo.

Piaget, J. (2001). Studies in Reflecting Abstration. (R. L. Campbell, Ed.). *Psychology Press*.

Piaget, J. & Inhelder, B. (2015). *Psicología del niño* (J. Delval, y P. Lomeli, Trads.). Ediciones Morata.

Rogemma, R. (2017). Research by Design: Proposition for a Methodological Approach. *Urban Sci. 1*(2), https://doi.org/10.3390/urbansci1010002

Serrano, C. B., (2017). Propuesta didáctica para la enseñanza de proporcionalidad a estudiantes de grado séptimo haciendo uso del aprendizaje significativo en diversos contextos. [Tesis de maestría]. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia.